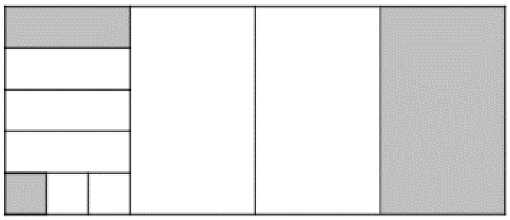
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
24. ožujka 2022.

6. razred – rješenja

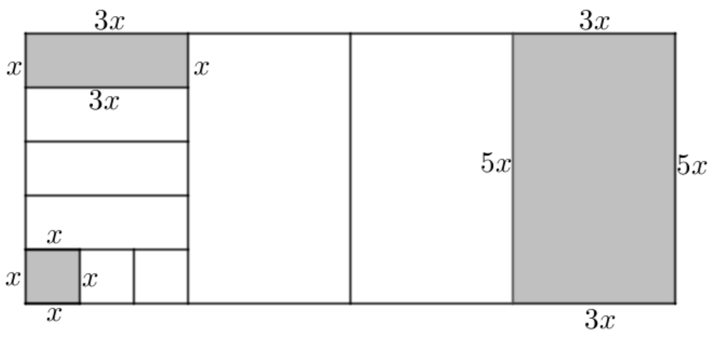
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Veliki pravokutnik je podijeljen na četiri sukladna pravokutnika, od kojih je jedan obojen. Zatim je jedan od neobojenih pravokutnika podijeljen na pet sukladnih pravokutnika od kojih je opet jedan obojen. I na kraju, jedan od tih neobojenih pravokutnika podijeljen je na tri sukladna pravokutnika, od kojih je jedan obojen, kao što je prikazano na slici.



Izračunaj površinu neobojenog dijela pravokutnika na slici, ako je najmanji obojeni pravokutnik kvadrat, a zbroj opsega sva tri obojena pravokutnika iznosi 19.6 cm.

Rješenje.
Označimo duljinu stranice obojenog kvadrata s x.
Tada su duljine stranica drugog obojenog pravokutnika $3x$ i x, a duljine stranica najvećeg obojenog pravokutnika su $3x$ i $5x$ kao što je označeno na slici.



1 BOD

Za obojene pravokutnike vrijedi:
$o_1 = 4x$
$o_2 = 2 \cdot (3x + x) = 8x$
$o_3 = 2 \cdot (3x + 5x) = 16x.$

Zbroj opsega sva tri obojena pravokutnika iznosi:
$o_1 + o_2 + o_3 = 4x + 2(3x + x) + 2(3x + 5x) = 28x.$ 1 BOD
Iz uvjeta zadatka vrijedi $28x = 19.6$ 1 BOD
pa je $x = 0.7$ cm (= 7 mm). 1 BOD
Duljine stranica početnog pravokutnika su
$12x = 12 \cdot 7$ mm $= 84$ mm i $5x = 5 \cdot 7$ mm $= 35$ mm. 1 BOD

Njegova je površina:
$P_4 = 84\text{ mm} \cdot 35\text{ mm} = 2940\text{ mm}^2$. 1 BOD
Površine obojenih pravokutnika su:
$P_1 = 7\text{ mm} \cdot 7\text{ mm} = 49\text{ mm}^2$
$P_2 = 21\text{ mm} \cdot 7\text{ mm} = 147\text{ mm}^2$
$P_3 = 21\text{ mm} \cdot 35\text{ mm} = 735\text{ mm}^2$ 2 BODA
Površinu neobojenog dijela pravokutnika izračunat ćemo kao razliku površine početnog pravokutnika i zbroja površina obojenih pravokutnika:
$P = P_4 - (P_1 + P_2 + P_3)$ 1 BOD
$P = 2940 - (49 + 147 + 735)$
$P = 2940 - 931$
$P = 2009\text{ mm}^2 \quad (= 20.09\text{ cm}^2)$. 1 BOD
……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

2. Maša je imala tri ogrlice s različitim brojem bisera. Od njih je napravila tri nove ogrlice od kojih svaka ima 80 bisera. To je postigla tako da je s prve ogrlice skinula $\frac{3}{7}$ bisera i premjestila ih na drugu ogrlicu, a zatim je s tako dobivene druge ogrlice ponovno premjestila $\frac{3}{7}$ bisera na treću i s tako dobivene treće ogrlice ponovno premjestila $\frac{3}{7}$ bisera na prvu.
Koliko je bisera bilo na svakoj od te tri ogrlice prije premještanja?

Prvo rješenje.
Nakon posljednjeg premještanja $\frac{3}{7}$ bisera, s treće na prvu ogrlicu, na trećoj je ogrlici ostalo 80 bisera.
Prije premještanja na trećoj je ogrlici bilo $\frac{7}{4} \cdot 80 = 140$ bisera. 2 BODA
To znači da je na prvu ogrlicu premješteno $\frac{3}{7} \cdot 140 = 60$ bisera, 1 BOD
pa je na prvoj ogrlici bilo 80 – 60 = 20 bisera. 1 BOD
Slično zaključujemo i za ostala premještanja.

	1. ogrlica	**2.** ogrlica	**3.** ogrlica	
Na kraju	80	80	80	
Prije 3. premještanja	20	80	140	
Prije 2. premještanja	20	140	80	3 BODA
Prije 1. premještanja	35	125	80	3 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Neka je *a* broj bisera na prvoj ogrlici prije premještanja, *b* broj bisera na drugoj ogrlici prije premještanja i *c* broj bisera na trećoj ogrlici prije premještanja.
Nakon posljednjeg premještanja $\frac{3}{7}$ bisera, s treće na prvu ogrlicu, na trećoj je ogrlici ostalo 80 bisera.
Neka je *d* broj bisera na trećoj ogrlici prije premještanja $\frac{3}{7}$ bisera na prvu ogrlicu.
Tada vrijedi $\frac{4}{7}d = 80$ 1 BOD
odnosno $d = \frac{7}{4} \cdot 80 = 140.$ 1 BOD
Dakle, na prvu je ogrlicu premješteno $\frac{3}{7} \cdot 140 = 60$ bisera. 1 BOD

Na prvoj je ogrlici nakon premještanja $\frac{3}{7}$ bisera na drugu ogrlicu bilo 80 – 60 = 20 bisera,

1 BOD

pa vrijedi $\frac{4}{7}a = 20$

odnosno $a = \frac{7}{4} \cdot 20 = 35$ bisera. 1 BOD

Dakle, s prve je ogrlice na drugu premješteno $\frac{3}{7} \cdot 35 = 15$ bisera. 1 BOD

Nakon premještanja 15 bisera s prve na drugu ogrlicu i premještanja $\frac{3}{7}$ bisera na treću ogrlicu vrijedi

$\frac{4}{7}(b + 15) = 80$

odnosno $b + 15 = 140$

pa je $b = 125$. 1 BOD

Na treću je ogrlicu premješteno $\frac{3}{7} \cdot 140 = 60$ bisera. 1 BOD

Nakon premještanja 60 bisera s druge na treću ogrlicu i premještanja $\frac{3}{7}$ bisera na prvu ogrlicu vrijedi

$\frac{4}{7}(c + 60) = 80$ 1 BOD

odnosno $c + 60 = 140$

pa je $c = 80$. 1 BOD

Na prvoj je ogrlici prije premještanja bilo 35, na drugoj 125, a na trećoj 80 bisera.

…………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.

Neka je x broj bisera na prvoj ogrlici prije premještanja, y broj bisera na drugoj ogrlici prije premještanja i z broj bisera na trećoj ogrlici prije premještanja.

Nakon premještanja $\frac{3}{7}x$ bisera s prve na drugu ogrlicu, na prvoj je ostalo je $\frac{4}{7}x$ bisera, 1 BOD

a na drugoj je ogrlici tada bilo $y + \frac{3}{7}x$ bisera. 1 BOD

Kad je Maša s druge ogrlice premjestila $\frac{3}{7}\left(y + \frac{3}{7}x\right)$ bisera na treću, na drugoj je ostalo 80 bisera pa je

$\frac{4}{7}\left(y + \frac{3}{7}x\right) = 80,$ 1 BOD

odnosno $y + \frac{3}{7}x = 80 \cdot \frac{7}{4} = 140.$ 1 BOD

Na trećoj je ogrlici nakon premještanja s druge ogrlice bilo

$z + \frac{3}{7}\left(y + \frac{3}{7}x\right) = z + \frac{3}{7} \cdot 140 = z + 60$ bisera, 1 BOD

a nakon premještanja $\frac{3}{7}(z + 60)$ bisera na prvu ogrlicu ostalo ih je 80 pa slijedi

$\frac{4}{7}(z + 60) = 80,$ 1 BOD

odnosno $z = 80.$ 1 BOD

Na prvoj će ogrlici nakon premještanja s treće ogrlice biti

$\frac{4}{7}x + \frac{3}{7}(z + 60) = 80$ bisera, 1 BOD

otkuda slijedi da je $\frac{4}{7}x + 60 = 80,$

odnosno $x = 35.$ 1 BOD

Iz $y + \frac{3}{7}x = 140$ slijedi $y + 15 = 140$ odnosno $y = 125.$ 1 BOD

Na prvoj je ogrlici prije premještanja bilo 35, na drugoj 125, a na trećoj 80 bisera.

…………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3. Na humanitarnoj akciji prodaju se čokoladne kuglice pakirane u kutije. Ana i Bela kupile su po 2 paketa, a Cico je kupio tri posljednja paketa. Ubrzo im se priključio i Dado, razočaran što su sve kuglice prodane. Ana, Bela i Cico su tada ravnopravno podijelili kuglice na četiri dijela. Dado je za svoj dio ostavio 245 kn. Kako će Ana, Bela i Cico pošteno podijeliti taj iznos?

Prvo rješenje.

Ukupno je bilo $2+2+3=7$ kutija pa zaključujemo da bi svatko trebao platiti $\frac{7}{4}$ kutija. 2 BODA

Kako je Dado za svoj dio ostavio 245 kn, zaključujemo da četvrtina kuglica u kutiji vrijedi 245 kn $: 7 = 35$ kn. 1 BOD

Ana je platila dvije kutije čokoladnih kuglica (8 četvrtina) pa zaključujemo da je potrošila $8 \cdot 35$ kn $= 280$ kn. 2 BODA

Isto vrijedi i za Belu. 1 BOD

Ana i Bela će od Dadinog novca dobiti svaka po 280 kn $- 245$ kn $= 35$ kn. 1 BOD

Cico je kupio tri kutije čokoladnih kuglica (12 četvrtina) pa zaključujemo da je potrošio $12 \cdot 35$ kn $= 420$ kn. 2 BODA

Cico će od Dadinog novca dobiti $420 - 245 = 175$ kuna. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Ukupno je bilo $2+2+3=7$ kutija.

Kako se čokoladne kuglice iz 7 kutija dijele na četvero djece, zaključujemo da svatko treba platiti $\frac{7}{4}$ kutija. 1 BOD

Ana je kupila 2 kutije čokoladnih kuglica (8 četvrtina), a treba zapravo platiti $\frac{7}{4}$.

Znači, Dado plaća njezinih $\frac{1}{4}$. 2 BODA

Isto vrijedi i za Belu. 1 BOD

Cico je kupio 3 kutije čokoladnih kuglica (12 četvrtina), a treba zapravo platiti $\frac{7}{4}$.

Znači, Dado plaća njegovih $\frac{5}{4}$. 2 BODA

245 kuna trebaju podijeliti na 7 jednakih dijelova

245 kn $: 7 = 35$ kn 1 BOD

od kojih će Ana i Bela dobiti po jedan dio, tj. svaka po 35 kn, 2 BODA

a Cico 5 dijelova tj. $5 \cdot 35$ kn = 175 kn. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka su a, b i c prirodni brojevi takvi da je $a < b$ i vrijedi $D(a,b) = 4$, $D(a,b,c) = 2$ te $V(a,b,c) = 400$. Odredi sve trojke (a,b,c) prirodnih brojeva za koje vrijede zadani uvjeti.

Prvo rješenje.

Kako vrijedi $V(a,b,c) = 400$ rastavimo broj 400 na proste faktore:

$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^2$. 1 BOD

Iz uvjeta $D(a,b) = 4$, zaključujemo da su brojevi a i b višekratnici broja 4.

Iz rastava broja 400 na proste faktore zaključujemo da su $a, b \in \{4, 16, 20, 80, 100, 400\}$. 2 BODA

Iz rastava broja 400 na proste faktore i uvjeta $D(a,b,c) = 2$ zaključujemo da je broj c višekratnik broja 2, ali ne i broja 4, pa vrijedi $c \in \{2, 10, 50\}$. 2 BODA

Ako je c = 2, vrijedi $a, b \in \{4, 400\}$ i $a, b \in \{16, 100\}$. 1 BOD
Ako je c = 10, vrijedi $a, b \in \{4, 400\}$ i $a, b \in \{16, 100\}$. 1 BOD
Ako je c = 50, vrijedi, $a, b \in \{4, 16\}$, $a, b \in \{4, 80\}$, $a, b \in \{4, 400\}$, $a, b \in \{16, 20\}$, $a, b \in \{16, 100\}$.
2 BODA

Tražene uređene trojke brojeva su:
(4, 400, 2), (16, 100, 2), (4, 400, 10), (16, 100, 10),
(4, 16, 50), (4, 80, 50), (4, 400, 50), (16, 20, 50), (16, 100, 50). 1 BOD

Ili, tražene trojke brojeva učenik može prikazati tablicom.

c	2	2	10	10	50	50	50	50	50
a	4	16	4	16	4	4	4	16	16
b	400	100	400	100	16	80	400	20	100

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik nema rastav na proste faktore, ali ima sva rješenja uz odgovarajuća obrazloženja, treba dobiti maksimalnih 10 bodova.

Drugo rješenje.
Uočimo da je $V(a, b, c) = 400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. 1 BOD
Iz uvjeta zadatka slijedi da je
$a = 4 \cdot k$ i $b = 4 \cdot l$ pri čemu je $D(k, l) = 1\ i\ k\ <\ l,$ 1 BOD
$c = 2 \cdot m,$ a m je neparan, zbog $D(a, \mathrm{b}, c) = 2$. 1 BOD
Točno jedan od brojeva k i l mora biti djeljiv s 4 i točno jedan djeljiv s 5 ili 25. 1 BOD
Također to znači da može biti $m = 1$, $m = 5$ ili $m = 25$. 1 BOD
To daje sljedećih 9 mogućnosti za:
(k, l, m) ⊠ $\{(1, 100, 1), (1, 100, 5), (1, 100, 25), (4, 25, 1), (4, 25, 5), (4, 25, 25), (1, 20, 25),$
$(4, 5, 25), (1, 4, 25)\}$ 4 BODA
pa slijedi:
(a, b, c) ⊠ $\{(4, 400, 2), (4, 400, 10), (4, 400, 50), (16, 100, 2), (16, 100, 10), (16, 100, 50),$
$(4, 16, 50), (4, 80, 50), (16, 20, 50)\}$ 1 BOD
…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.
Kako vrijedi $V(a, b, c) = 400$, rastavimo broj 400 na proste faktore:
$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^2$. 1 BOD
Uočimo da su brojevi 2 i 5 jedini prosti faktori u rastavu broja 400 pa tako a, b, c nemaju drugih prostih faktora.
Kako se faktor 2 javlja 4 puta, jedan od brojeva mora sadržavati sva ta četiri faktora ($2^4 = 16$), a zbog uvjeta $D(a, b) = 4$ zaključujemo da drugi broj mora sadržavati $2^2 = 4$.
Brojeve a i b tada možemo zapisati $a = 16 \cdot k$ i $b = 4 \cdot l$ ili $a = 4 \cdot k$ i $b = 16 \cdot l$. 1 BOD
Zbog uvjeta $D(a, b, c) = 2$, treći broj c smije sadržavati samo jedan faktor 2 pa ga možemo zapisati $c = 2 \cdot m$. 1 BOD
Pri tome traženi brojevi mogu sadržavati najviše dva faktora 5, pazeći da a i b nemaju istovremeno faktor 5 zbog $D(a, b) = 4$. 1 BOD
Zbog $D(a, b, c) = 2$, broj c ne smije istovremeno imati zajednički faktor 5 s brojevima a i b. 1 BOD

Ako promatramo broj faktora 5, mogući su sljedeći slučajevi:

(k, l, m)	$a = 16 \cdot k$, $b = 4 \cdot l$, $c = 2 \cdot m$	$a = 4 \cdot k$, $b = 16 \cdot l$, $c = 2 \cdot m$
(1, 1, 25) tj. a i b ne sadrže faktor 5, broj c sadrži dva faktora 5	~~16, 4, 50~~	4, 16, 50
(1, 5, 25) tj. a ne sadrži faktor 5, b sadrži jedan faktor 5, c sadrži dva faktora 5	16, 20, 50	4, 80, 50
(5, 1, 25) tj. a sadrži jedan faktor 5, b ne sadrži faktor 5, c sadrži dva faktora 5	~~80, 4, 50~~	~~20, 16, 50~~
(1, 25, 25) tj. a ne sadrži faktor 5, b i c sadrže dva faktora 5	16, 100, 50	4, 400, 50
(25, 1, 25) tj. a sadrži dva faktora 5, b ne sadrži faktor 5, c sadrži dva faktora 5	~~400, 4, 50~~	~~100, 16, 50~~
(25, 1, 5) tj. a sadrži dva faktora 5, b ne sadrži faktor 5, c sadrži jedan faktor 5	~~400, 4, 10~~	~~100, 16, 10~~
(1, 25, 5) tj. a ne sadrži faktor 5, b sadrži dva faktora 5, c sadrži jedan faktor 5	16, 100, 10	4, 400, 10
(25, 1, 1) tj. a sadrži dva faktora 5, b i c ne sadrže faktor 5	~~400, 4, 2~~	~~100, 16, 2~~
(1, 25, 1) tj. a i c ne sadrže faktor 5, b sadrži dva faktora 5	16,100, 2	4, 400, 2

4 BODA

Ukupno postoji 18 mogućnosti od kojih samo 9 zadovoljava uvjet $a < b$:
$(4, 16, 50), (16, 20, 50), (4, 80, 50), (16, 100, 50), (4, 400, 50), (16, 100, 10), (4, 400, 10),$
$(16, 100, 2)$ i $(4, 400, 2)$. 1 BOD

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Za dobivena 4 rješenja učenik treba dobiti 2 BODA, za dobivenih 6 rješenja 3 BODA, a za 8 rješenja 4 BODA. Ukoliko učenik ima samo rastav broja 400 na proste faktore i svih 9 rješenja, a bez odgovarajućeg obrazloženja, može dobiti najviše 6 BODOVA.

5. Na koliko načina Iva, Ana i Tea mogu podijeliti 6 različitih nagrada tako da svaka od njih dobije barem jednu nagradu?

Prvo rješenje.
Iz uvjeta zadatka je vidljivo da sve nagrade moraju biti podijeljene, ali sve djevojčice ne moraju dobiti isti broj nagrada.

Razlikujemo tri slučaja 1–1–4, 2–2–2, 1–2–3, 1 BOD
pri čemu brojevi označavaju koliko nagrada dobiva neka osoba.

U svakom slučaju trebamo odrediti na koliko načina možemo odabrati koja djevojčica će dobiti koji broj nagrada, te koje točno nagrade dobiva.

1° Slučaj 1–1–4
Na tri načina možemo odrediti koja djevojčica dobiva četiri nagrade. 1 BOD

Recimo da Iva i Ana dobivaju po jednu, a Tea četiri nagrade. Ivinu nagradu možemo odabrati na 6 načina, Aninu na 5 načina, a za Teu će tada preostati 4 nagrade koje onda možemo odabrati samo na jedan način. Dobivamo $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ načina. 1 BOD
Analogno zaključujemo u preostala dva slučaja, pa je ukupan broj načina u ovom slučaju
$30 \cdot 3 = 90$. 1 BOD

2° Slučaj 2–2–2
Ivine dvije nagrade od ukupno 6 nagrada možemo odabrati na $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ načina,
Anine dvije od preostale 4 nagrade možemo odabrati na $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ načina,
i na kraju, za Teu preostaju dvije nagrade koje onda biramo na jedan način.
Dakle, broj načina podjele nagrada u ovom slučaju je $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$. 1 BOD
Sve djevojčice dobivaju po dvije nagrade, pa ne moramo birati koja dobiva koliko nagrada. 1 BOD

3° Slučaj 1–2–3
Imamo šest načina da odaberemo koja djevojčica će dobiti jednu, dvije ili tri nagrade. 1 BOD
Recimo da Iva dobije jednu, Ana dvije, a Tea tri nagrade.
Ivinu jednu nagradu možemo odabrati na 6 načina, tada će za Anu preostati 5 nagrada pa njene dvije od tih pet nagrada možemo odabrati na $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ načina, a za Teu će ostati tri nagrade koje možemo odabrati na jedan način. Dakle, broj načina podjele nagrada u kojima će Iva dobiti jednu, Ana dvije, a Tea tri nagrade je $6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$. 1 BOD

Ukupan broj načina podjele nagrada u ovom slučaju je $60 \cdot 6 = 360$. 1 BOD
Konačno, 6 različitih nagrada možemo podijeliti Ivi, Ani i Tei na $90 + 90 + 360 = 540$ načina, a da pri tom svaka djevojčica dobije barem jednu nagradu. 1 BOD
…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je učenik ukupan broj podjela nagrada dobio kao zbroj 90 + 270 + 180 = 540, može dobiti najviše 7 BODOVA.

Drugo rješenje.
Odredimo broj svih rasporeda, u kojima neke djevojčice neće dobiti nagrade, i od njega oduzmimo broj rasporeda u kojima baš neka od njih neće dobiti nagradu. 1 BOD
Svaku od 6 nagrada možemo dati bilo kojoj od tri djevojčice. Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju, nagrade možemo raspodijeliti na $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$ 1 BOD
$= 27 \cdot 27 = 729$ načina. 1 BOD
Međutim, tu smo prebrojali i one načine u kojima jedna ili dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu. 1 BOD
Ako Iva ne dobije niti jednu nagradu, onda svih 6 nagrada dijelimo samo Ani i Tei. To možemo napraviti na $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 8 \cdot 8 = 64$ načina. 2 BODA
Analogno, ako Ana ili Tea neće dobiti niti jednu nagradu, taj broj treba pomnožiti s 3, tj.
$64 \cdot 3 = 192$. 1 BOD
No, tada smo dvaput prebrojali slučajeve u kojima po dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu.
To se događa na 3 moguća načina (sve nagrade Ivi, sve nagrade Ani ili sve nagrade Tei). 1 BOD
Dakle, broj načina podjele nagrada u kojima jedna ili dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu je
$192 - 3 = 189$. 1 BOD
Konačno, 6 različitih nagrada možemo podijeliti Ivi, Ani i Tei na $729 - 189 = 540$ načina, a da pri tom svaka djevojčica dobije barem jednu nagradu. 1 BOD
…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA