ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
24. ožujka 2022.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. U svaku od tri jednake posude stane 600 litara tekućine te je svaka napunjena točno do pola. Iz prve posude u drugu prelijemo 18 % tekućine. Potom iz druge posude u treću prelijemo 2/3 tekućine. Nakon toga iz treće posude u prvu prelijemo 3/8 tekućine i još 5 litara tekućine. Koliko litara tekućine treba preliti iz posude s najviše u posudu s najmanje tekućine kako bi u tim posudama bila jednaka količina tekućine?

Rješenje.

$\frac{1}{2}$ od 600 je 300.

Dakle, u svakoj posudi ima 300 litara tekućine. 1 BOD

18 % zapisujemo u obliku razlomka $18\,\% = \frac{18}{100}$.

$\frac{18}{100}$ od 300 je 54. 1 BOD

54 litara tekućine prelijemo iz prve u drugu posudu pa je u prvoj posudi

300 – 54 = 246 litara tekućine, a u drugoj 300 + 54 = 354 litara tekućine. 1 BOD

$\frac{2}{3}$ od 354 je 236. 1 BOD

236 litara tekućine prelijemo iz druge u treću posudu pa je u drugoj posudi

354 – 236 = 118 litara tekućine, a u trećoj 300 + 236 = 536 litara tekućine. 1 BOD

$\frac{3}{8}$ od 536 je 201. 1 BOD

Kako dodatno prelijevamo još pet litara tekućine ukupno iz treće posude u prvu prelijevamo

201 + 5 = 206 litara tekućine 1 BOD

pa je u trećoj posudi 536 – 206 = 330 litara tekućine, a u prvoj

246 + 206 = 452 litara tekućine. 1 BOD

Nakon svih prelijevanja najviše tekućine je u prvoj posudi (452 L),

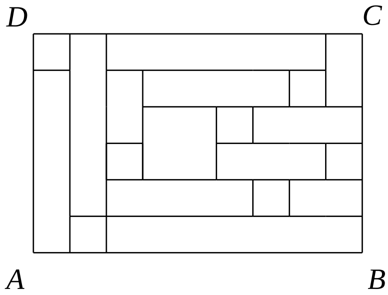
a najmanje u drugoj posudi (118 L). 1 BOD

Da bismo u prvoj i drugoj posudi imali jednaku količinu tekućine iz prve u drugu trebamo preliti

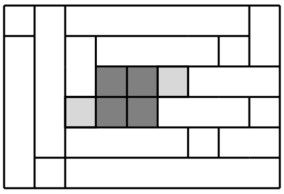
(452 – 118) : 2 = 334 : 2 = 167 litara tekućine. 1 BOD

…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

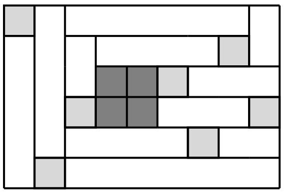
2. Pravokutnik *ABCD* na crtežu podijeljen je na pravokutnike, svi manji kvadrati su sukladni. Površina pravokutnika *ABCD* je 3456 cm^2. Koliki je zbroj opsega svih pravokutnika nacrtanih unutar pravokutnika *ABCD*, a koji unutar sebe ne sadrže manje pravokutnike?



Rješenje.
Uočimo da je duljina stranice većeg kvadrata dvostruko dulja od duljine stranice manjeg kvadrata.
1 BOD



Uočimo da su kvadrati unutar pravokutnika *ABCD* raspoređeni u 9 stupaca i 6 redova. 1 BOD



Duljinu stranice manjeg kvadrata označimo s a.
Duljine stranica pravokutnika *ABCD* su $9a$ i $6a$ pa je površina pravokutnika *ABCD* je:
$9a \cdot 6a = 3456$ tj. 1 BOD
$54a^2 = 3456$
$a^2 = 3456 : 54$
$a^2 = 64$
Duljina stranice manjeg kvadrata je $a = 8$ cm. 1 BOD
Kvadrat je pravokutnik čije su sve stranice jednakih duljina pa u zbroj opsega svih pravokutnika koji su nacrtani unutar pravokutnika *ABCD* trebamo uključiti i opsege svih kvadrata. 1 BOD

Unutar pravokutnika *ABCD* nacrtani su sljedeći pravokutnici i opsezi su redom:
7 kvadrata s duljinom stranice 8 cm…..$7 \cdot 4 \cdot 8 = 224$ cm,
1 kvadrat s duljinom stranice 16 cm…..$1 \cdot 4 \cdot 16 = 64$ cm, 1 BOD
1 pravokutnik s duljinama stranica 56 cm i 8 cm….. $2 \cdot (56 + 8) = 128$ cm,
1 pravokutnik s duljinama stranica 48 cm i 8 cm…..$2 \cdot (48 + 8) = 112$ cm, 1 BOD
2 pravokutnika s duljinama stranica 40 cm i 8 cm….. $2 \cdot 2 \cdot (40 + 8) = 192$ cm,
2 pravokutnika s duljinama stranica 32 cm i 8 cm…..$2 \cdot 2 \cdot (32 + 8) = 160$ cm, 1 BOD
2 pravokutnika s duljinama stranica 24 cm i 8 cm…..$2 \cdot 2 \cdot (24 + 8) = 192$ cm,
3 pravokutnika s duljinama stranica 16 cm i 8 cm….. $3 \cdot 2 \cdot (16 + 8) = 144$ cm. 1 BOD

Zbroj opsega pravokutnika nacrtani unutar pravokutnika *ABCD* je:
224 cm + 64 cm + 128 cm + 112 cm + 192 cm + 160 cm + 128 cm + 144 cm
= 1152 cm 1 BOD
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako učenik ne napiše zaključak da su i kvadrati pravokutnici, ali u daljnjem postupku računa njihov opseg 1 BOD za taj zaključak se dodaje.

3. Anita i Boris gađaju lopticom metu, svatko po 50 puta. Jedan dio mete je obojen žuto, a drugi dio plavo. Za svaki pogodak u metu dobiva se određeni broj bodova, a ako se meta promaši ne dobivaju se bodovi. Anita je 36 puta pogodila žuti dio, a 2 puta promašila metu. Boris je 6 puta pogodio plavi dio, a dvostruko je više puta od Anite promašio metu. Učitelj im je na kraju gađanja rekao da su zajedno osvojili 716 bodova, te da je Boris osvojio 4 boda manje od Anite. Koliko bodova donosi pogodak u žuti, a koliko u plavi dio mete?

Rješenje.
Računamo koliko su puta Anita i Boris pogodili plavi dio mete, žuti dio mete te koliko su puta promašili metu.

Anita je 36 puta pogodila žuti dio mete, a 2 puta promašila metu pa je plavi dio mete pogodila
$50 - (36 + 2) = 50 - 38 = 12$ puta. 1 BOD

Dakle, Boris je 6 puta pogodio plavi dio mete, a 4 puta (2 puta više od Anite) promašio metu pa je žuti dio mete pogodio $50 - (6 + 4) = 50 - 10 = 40$ puta. 1 BOD

Označimo s A broj bodova koje je osvojila Anita, a s B broj bodova koje je osvojio Boris. Iz uvjeta zadatka pronalazimo:
$A + B = 716$ i $B = A - 4$.

Uvrštavanjem $B = A - 4$ u prvu jednadžbu dobivamo:

$A + A - 4 = 716$ 1 BOD

$2A = 716 + 4$

$2A = 720$

$A = 720 : 2$

$A = 360$

Anita je osvojila 360 bodova. 1 BOD

$B = 360 - 4 = 356$

Boris je osvojio 356 bodova. 1 BOD

Označimo s x broj bodova koji se dobiva za pogodak u žuti dio mete, a s y broj bodova koji se dobiva za pogodak u plavi dio mete.

Iz uvjeta zadatka imamo dvije jednadžbe:

$36x + 12y = 360$

$40x + 6y = 356$ 1 BOD

Dalje možemo rješavati na više načina.

Prvi način:
Množenjem druge jednadžbe s 2 dobijemo jednadžbu

$80x + 12y = 712$ 1 BOD

$36x + 12y = 360$

Iz ovog zapisa je vidljivo da se lijeve strane razlikuju za $44x$, a desne za 352 1 BOD

pa je $44x = 352$

$x = 352 : 44$

$x = 8$. Pogodak u žuti dio mete donosi 8 bodova. 1 BOD

$6y = 356 – 320$

$6y = 36$

$y = 36 : 6$

$y = 6$. Pogodak u plavi dio mete donosi 6 bodova. 1 BOD

Drugi način:
Dijeljenjem prve jednadžbe s 2 dobivamo

$18x + 6y = 180$ 1 BOD

$40x + 6y = 356$

Iz ovog zapisa je vidljivo da se lijeve strane razlikuju za $22x$, a desne za 176 1 BOD

pa je $22x = 176$

$x = 176 : 22$

$x = 8$. Pogodak u žuti dio mete donosi 8 bodova. 1 BOD

$6y = 180 – 144$

$6y = 36$

$y = 36:6$

$y = 6$. Pogodak u plavi dio mete donosi 6 bodova. 1 BOD

Treći način:
Iz obje jednadžbe izrazimo $6y$ pa imamo $6y = 180 – 18x$ i $6y = 356 – 40x$. 1 BOD
Izjednačavanjem desnih strana imamo:

$180 – 18x = 356 – 40x$ 1 BOD

$40x – 18x = 356 – 180$

$22x = 176$

$x = 176 : 22$

$x = 8$. Pogodak u žuti dio mete donosi 8 bodova. 1 BOD

$6y = 180 – 144$

$6y = 36$

$y = 36:6$

$y = 6$. Pogodak u plavi dio mete donosi 6 bodova. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik izračuna koliko se bodova dobiva za pogodak u žuti i plavi dio mete na neki drugi način te ukoliko argumentirano objasni sve korake u rješavanju osvaja maksimalan broj bodova predviđen za taj dio zadatka.

4. Izračunaj aritmetičku sredinu svih višekratnika broja 12 koji su oblika $\overline{3a8b}$. Koji od dobivenih višekratnika treba izostaviti kako bi aritmetička sredina preostalih višekratnika bila za 50 veća od aritmetičke sredine svih višekratnika?

Rješenje.

Broj je djeljiv s 12 ako je djeljiv i s 4 i s 3.

Broj je djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4 pa je znamenka b 0, 4 ili 8. 1 BOD

Za $b = 0$ broj je oblika $\overline{3a80}$.

$3 + a + 8 + 0 = a + 11$ pa znamenka a može biti 1, 4 ili 7, a

dobiveni su brojevi $3180, 3480, 3780$. 1 BOD

Za $b = 4$ broj je oblika $\overline{3a84}$.

$3 + a + 8 + 4 = a + 15$ pa znamenka a može biti 0, 3, 6 ili 9, a

dobiveni su brojevi $3084, 3384, 3684, 3984$. 1 BOD

Za $b = 8$ broj je oblika $\overline{3a88}$.

$3 + a + 8 + 8 = a + 19$ pa znamenka a može biti 2, 5 ili 8, a

dobiveni su brojevi $3288, 3588, 3888$. 1 BOD

Aritmetička sredina brojeva iznosi

$(3180 + 3480 + 3780 + 3084 + 3384 + 3684 + 3984 + 3288 + 3588 + 3888) : 10 =$

$35340 : 10 = 3534$. 1 BOD

Neka je x broj koji treba izostaviti. Tada vrijedi

$(35340 - x) : 9 = 3584$ 2 BODA

$35340 - x = 3584 \cdot 9$

$35340 - x = 32256$ 1 BOD

$x = 35340 - 32256$ 1 BOD

$x = 3084$

Treba izostaviti broj 3084. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je iz slijeda rješavanja jasno da je traženo rješenje broj 3084 za nedostatak pisanog odgovora ne treba oduzimati bod.

5. Ante, Bruno, Ciprijan, Davor, Emanuel i Franko se trebaju poredati u vrstu.
a) Na koliko se različitih načina dječaci mogu poredati ako Bruno stoji lijevo od Emanuela?
b) Na koliko se različitih načina dječaci mogu poredati ako između Ciprijana i Davora ne stoji niti jedan drugi dječak?

Rješenje.
a) Prvi način:
Ako bismo dječake poredali, bez ikakvih uvjeta, redom biramo jednog od 6 dječaka na prvo mjesto, pa jednog od 5 preostalih dječaka na drugo mjesto i tako do kraja. To možemo učiniti na
$6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ načina. 2 BODA
Uočimo da među tim načinima svaki raspored u kojem je Bruno lijevo od Emanuela ima para u kojem je Bruno desno od Emanuela. Parove formiramo tako da Bruno i Emanuel zamijene svoja mjesta, a svi ostali zadrže svoja mjesta. 3 BODA
Stoga je traženi broj $720 : 2 = 360$. 1 BOD

a) Drugi način:
Ako je Bruno uvijek lijevo od Emanuela, potrebno je razmotriti sljedeće povoljne mogućnosti:

I. Bruno je u vrsti prvi slijeva. Preostali se dječaci tada mogu razmjestiti na sve moguće načine jer je uvjet uvijek ispunjen.
Ukupno je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ različitih načina. 1 BOD
II. Bruno je u vrsti drugi slijeva. Tada se prvo mjesto može popuniti na 4 načina (bez Emanuela), a preostala 4 na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina,
što je ukupno $4 \cdot 24 = 96$ različitih načina. 1 BOD
III. Bruno je u vrsti treći slijeva. Tada se prvo mjesto može popuniti na 4 načina (bez Emanuela), drugo na 3 načina (bez Emanuela), a preostala 3 mjesta na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina,
što je ukupno $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ različita načina. 1 BOD
IV. Bruno je u vrsti četvrti slijeva. Tada se prvo mjesto može popuniti na 4 načina (bez Emanuela), drugo na 3 načina (bez Emanuela), treće na 2 načina (bez Emanuela) a preostala 2 mjesta na $2 \cdot 1 = 2$ načina,
što je ukupno $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ različitih načina. 1 BOD
V. Bruno je u vrsti peti slijeva. Tada se prvo mjesto može popuniti na 4 načina (bez Emanuela), drugo na 3 načina (bez Emanuela), treće na 2 načina (bez Emanuela), četvrto na 1 način (bez Emanuela), a na preostalom šestom mjestu je Emanuel (1 način),
što je ukupno $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$ različita načina. 1 BOD
VI. Ako je Bruno u vrsti šesti (posljednji) nema povoljnih mogućnosti.

Ukupno je $120 + 96 + 72 + 48 + 24 = 360$ povoljnih mogućnosti slaganja vrste prema zadanom uvjetu.
1 BOD

b) Prvi način:
Označimo sa *A*, *B*, *C*, *D*, *E* i *F* dječake prema početnim slovima njihovih imena.
Dječake Ciprijana i Davora promatramo kao nedjeljivu cjelinu i u vrstu ih slažemo u bloku *CD* (Ciprijan prvi slijeva pored Davora) ili *DC* (Ciprijan prvi zdesna pored Davora).
Stoga za razmještaj imamo 5 nedjeljivih cjelina: osobe *A*, *B*, *E*, *F* i blok *CD* ili blok *DC*. 1 BOD
Vrstu možemo složiti na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ različitih načina. 1 BOD
Ako vrstu slažemo s blokom *DC* opet je 120 različitih načina. 1 BOD
Ukupno je $120 + 120 = 240$ različitih rasporeda u vrsti sa zadanim uvjetom. 1 BOD

b) Drugi način:

Označimo sa *A*, *B*, *C*, *D*, *E* i *F* dječake prema početnim slovima njihovih imena.

Ako Ciprijan stoji uvijek neposredno pored Davora, onda mu može stajati neposredno slijeva (*CD*) ili neposredno zdesna (*DC*).

Promotrit ćemo prvo mogućnosti slaganja vrste ako je Ciprijan prvi slijeva pored Davora.

- Ako Ciprijan stoji prvi u vrsti slijeva onda je Davor drugi pa imamo 24 različita rasporeda:

CD ABEF	*CD BAEF*	*CD EABF*	*CD FABE*
CD ABFE	*CD BAFE*	*CD EAFB*	*CD FAEB*
CD AEBF	*CD BEAF*	*CD EBAF*	*CD FBAE*
CD AEFB	*CD BEFA*	*CD EBFA*	*CD FBEA*
CD AFBE	*CD BFAE*	*CD EFAB*	*CD FEAB*
CD AFEB	*CD BFEA*	*CD EFBA*	*CD FEBA*

1 BOD

- Ako Ciprijan stoji drugi u vrsti slijeva onda je Davor treći pa imamo 24 različita rasporeda.
- Ako Ciprijan stoji treći u vrsti slijeva onda je Davor četvrti pa imamo 24 različita rasporeda.
- Ako Ciprijan stoji četvrti u vrsti slijeva onda je Davor peti pa imamo 24 različita rasporeda.
- Ako Ciprijan stoji peti u vrsti slijeva onda je Davor šesti pa imamo 24 različita rasporeda.

Ukupno je $24 \cdot 5 = 120$ različitih poredaka ako je Ciprijan prvi slijeva pored Davora. 1 BOD

Analogno je ukupno je $24 \cdot 5 = 120$ različitih poredaka ako je Ciprijan prvi

zdesna pored Davora. 1 BOD

Ukupno je 120 + 120 = 240 različitih rasporeda u vrsti sa zadanim uvjetom. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko učenik na bilo koji način pokaže sustavnost u prebrojavanju mogućih rasporeda i točno izračuna broj mogućih rasporeda zadatak treba bodovati s maksimalnim brojem bodova. Ukoliko učenik na bilo koji način pokaže sustavnost u prebrojavanju mogućih rasporeda, ali ne dobije točan rezultat može ostvariti najviše 3 BODA u a) i 2 BODA u b).

Napomena 2: Samo ako učenik napravi računsku, a ne logičku pogrešku primjenjuje se princip "slijedi pogrešku".