

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

24. ožujka 2022.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Četvrti razred škole za divove pohađa 20 učenika. Svi su učenici sudjelovali u izgradnji tornja. Deset je učenika slagalo kocke jednu na drugu tako da je svaki stavio dvostruko više kocaka od prethodnog. Prvi je učenik stavio jednu kocku, drugi dvije kocke, treći četiri kocke, i tako dalje. Nakon toga su preostali učenici s vrha uzimali kocke i to tako da je prvi od njih uzeo jednu kocku, drugi dvije, treći tri i tako redom do posljednjeg preostalog učenika. Kolika je na kraju visina izgrađenog tornja ako je visina svake kocke 5 cm?

**Rješenje.**

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 \quad 2 \text{ BODA}$$
$$= 1023 \quad 1 \text{ BOD}$$

Desetero učenika izgradilo je toranj od 1023 kocke.

S tornja je kocke uzimalo  $20 - 10 = 10$  učenika. 1 BOD

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad 2 \text{ BODA}$$
$$= 55 \quad 1 \text{ BOD}$$

Uzeli su 55 kocaka.

Ostalo je  $1023 - 55 = 968$  kocaka. 1 BOD

Visina tornja je  $968 \cdot 5 = 4840$  cm. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Cijena buketa u kojemu su četiri ruže i četiri tulipana je 96 kn, a cijena buketa u kojemu su dvije ruže i šest tulipana je 84 kn. Kolika je cijena buketa u kojemu je pet ruža i tri tulipana?

**Prvo rješenje.**

Nazovimo buket s četiri ruže i četiri tulipana prvi buket. Kad umjesto dvije ruže u prvi buket stavimo dva tulipana, cijena mu se smanji za  $96 - 84 = 12$  kuna. 3 BODA

To znači da su dvije ruže skuplje od dva tulipana za 12 kuna, 2 BODA

odnosno jedna ruža je skuplja od jednog tulipana za 6 kuna. 1 BOD

Buket od 5 ruža i 3 tulipana dobijemo tako da u prvom buketu tulipan zamijenimo ružom. 1 BOD

To će poskupiti prvi buket za 6 kuna. 1 BOD

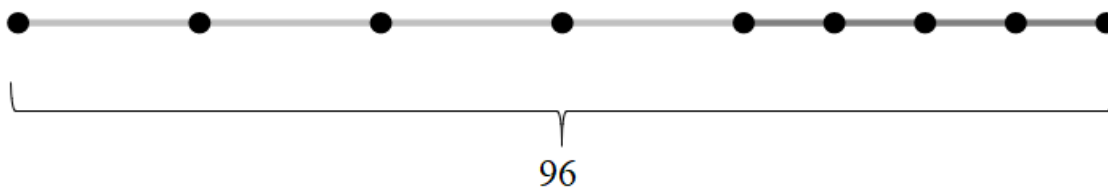
Dakle, cijena buketa s 5 ruža i 3 tulipana je:  $96 + 6 = 102$  kune. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

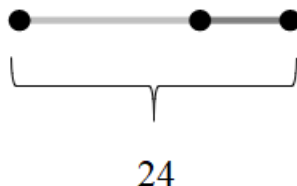
Označimo cijenu jedne ruže s  $\bullet$  —  $\bullet$  , a cijenu jednog tulipana s  $\bullet$  —  $\bullet$  .

Cijena buketa s 4 ruže i 4 tulipana je 96 kn.

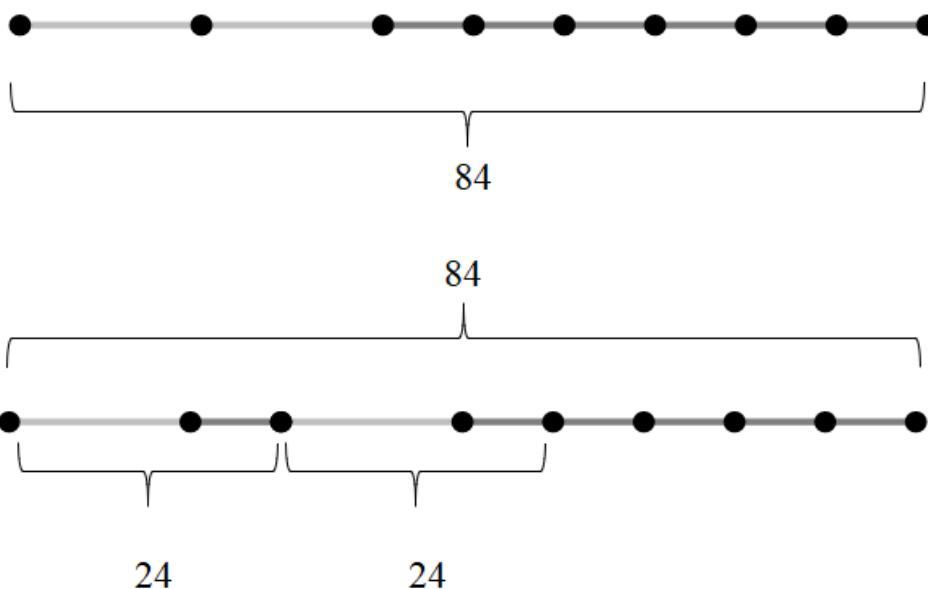


Cijena jedne ruže i jednog tulipana je  $96 : 4 = 24$  kn.

2 BODA



Cijena buketa s 2 ruže i 6 tulipana je 84 kn.



Cijena 4 tulipana je  $84 - 24 - 24 = 36$  kn.

4 BODA

Cijena jednog tulipana je  $36 : 4 = 9$  kn.

1 BOD

Cijena jedne ruže je  $24 - 9 = 15$  kn.

1 BOD

Cijena buketa s 5 ruža i 3 tulipana je:

$$5 \cdot 15 + 3 \cdot 9 = 75 + 27 = 102 \text{ kn.}$$

2 BODA

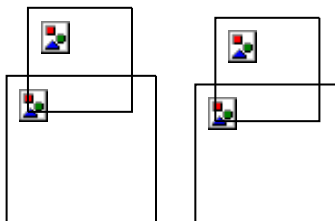
..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Dovoljno je rješenje zapisati samo riječima, samo grafički ili samo simbolima (jednadžbama). Bodove nose istaknuti zaključci zapisani na bilo koji od tih načina.

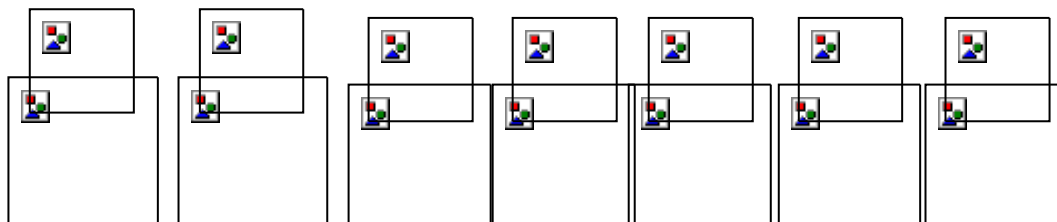
3. Frane u svojoj štednoj kasci ima ukupno 108 kn u kovanicama od 5 kn, 2 kn i 1 kn. Vrijednost novca u kovanicama od 5 kn i 2 kn je jednaka. Broj kovanica od 1 kn jednak je broju kovanica od 5 kn i 2 kn zajedno. Koliko se kovanica pojedine vrste nalazi u kasci?

**Prvo rješenje.**

Kovanica od 1 kn ima točno onoliko koliko i kovanica od 5 kn i 2 kn zajedno pa možemo na svaku kovanicu od 5 kn staviti kovanicu 1 kn i tako dobiti „paketić“ od 6 kn, te na svaku kovanicu od 2 kn staviti 1 kn i dobiti „paketić“ od 3 kn. 2 BODA



Iznosi u kovanicama od 5 kn i 2 kn su jednaki pa na svake dvije kovanice od 5 kn (tj. paketića od 6 kn) dolazi pet kovanica od 2 kn (tj. paketića od 3 kn). 2 BODA



Dakle, sve kovanice možemo složiti u grupe tako da svaka grupa ima dva paketića od 6 kn i pet paketića od 3 kn te vrijedi  $2 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 27$  kn. 2 BODA

Ukupan iznos je 108 kn pa imamo  $108 : 27 = 4$  takve grupe. 1 BOD

U svakoj grupi imamo 2 kovanice od 5 kn, pa je ukupno 8 takvih kovanica. 1 BOD

U svakoj grupi imamo 5 kovanica od 2 kn, pa je ukupno 20 takvih kovanica. 1 BOD

U svakoj grupi imamo 7 kovanica od 1 kn, pa je ukupno 28 takvih kovanica. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

Ako u kasci ima 8 kovanica od 5 kn, 20 kovanica od 2 kn i 28 kovanica od 1 kn, 2 BODA

onda u kasci ima točno  $8 \cdot 5 + 20 \cdot 2 + 28 \cdot 1 = 108$  kn. 1 BOD

Ako smanjimo broj kovanica od 5 kn, moramo smanjiti i broj kovanica od 2 kn (i obrnuto) jer su njihovi iznosi jednaki. Također, ako povećamo jednu vrstu, moramo i drugu. 2 BODA

Ako bismo smanjili broj kovanica od 5 kn i 2 kn, morali bismo smanjiti broj kovanica od 1 kn (jer njih ima kao od 5 kn i 2 kn zajedno), pa bi ukupan iznos bio manji od 108. 2 BODA

Također, ako povećamo broj kovanica od 5 kn i 2 kn, morali bismo povećati broj kovanica od 1 kn i iznos bi bio veći od 108. 2 BODA

Dakle, postoji samo jedno rješenje, ono koje smo naveli na početku. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Zapisivanje točnog rezultata (bilo kojom metodom, pa makar i pogađanjem) nosi 2 BODA. Provođenje metode koja pokazuje da nema drugih rješenja nosi 8 BODOVA. Jedan način argumentacije je dan u prethodnom rješenju.

**Treće rješenje.**

Broj kovanica od 2 kn mora biti višekratnik broja 5. 2 BODA

Ako u kasici ima pet kovanica od 2 kn, onda ima dvije kovanice od 5 kn  
(jer je vrijednost jednih i drugih 10). 1 BOD

To znači da ima 7 kovanica od 1 kn, pa u kasici ima ukupno  $10 + 10 + 7 = 27$  kn, što nije istina. 1 BOD

Na sličan način bismo računali za veći broj kovanica od 2 kn:

Broj kovanica 2 kn	Broj kovanica 5 kn	Broj kovanica 1 kn	Ukupna vrijednost
10	4	14	54
15	6	21	81
<b>20</b>	<b>8</b>	<b>28</b>	<b>108</b>
25	10	35	135

2 BODA

Kad bismo povećali broj kovanica od 2 kn, povećao bi se i ukupan iznos. 2 BODA

To znači da se u kasici nalazi 20 kovanica od 2 kn, 8 kovanica od 5 kn i 28 kovanica od 1 kn. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1:** Konačni rezultat nosi 2 BODA.

Ako učenici ispisuju razne mogućnosti, objašnjenje zašto neke mogućnosti nije potrebno promatrati (npr. broj kovanica od 5 kn je paran broj, broj kovanica od 2 kn je višekratnik broja 5) nosi 2 BODA.

Računanje brojeva kovanica na temelju uvjeta i odbacivanje nemogućih slučajeva (npr. dobili smo ukupnu vrijednost 27, što nije točno) također 2 BODA.

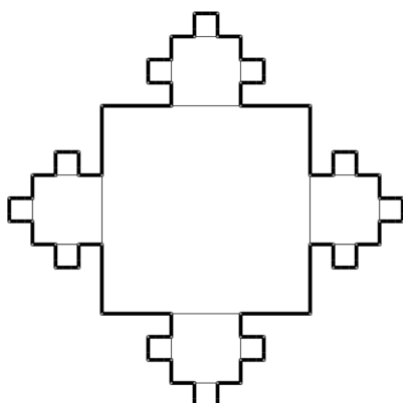
Sustavno organiziranje podataka na način kojim bi se mogle provjeriti sve mogućnosti (npr. od manjeg prema većem broju kovanica određene vrste) nosi 2 BODA.

Isticanje da povećanjem broja kovanica dobivamo veću ukupnu vrijednost i zaključak da nema više rješenja nosi 2 BODA.

**Napomena 2:** Zadatak se može riješiti i zapisivanjem sustava tri jednadžbe s tri nepoznanice koje označavaju broj kovanica pojedine vrste. Zapis takvog sustava nosi 2 BODA, eliminacija jedne varijable 3 BODA, određivanje jedna nepoznanice 3 BODA, određivanje preostale dvije nepoznanice 2 BODA.

4. U središtu mozaika nalazi se velika kvadratna ploča sa stranicom duljine 81 cm. Uz srednju trećinu svakog njenog ruba postavljene su manje kvadratne ploče. Potom su uz srednju trećinu svakog slobodnog ruba manje kvadratne ploče postavljene najmanje kvadratne ploče. Od koliko se ploča sastoji mozaik? Koliki je opseg mozaika?

**Rješenje.**



2 BODA

Jedna je velika, 4 su manje, a 12 je najmanjih kvadratnih ploča.

Ukupno je  $1 + 4 + 12 = 17$  kvadratnih ploča.

1 BOD

Rub mozaika sastoji se od:

$$8 \text{ dužina duljine } 81 : 3 = 27 \text{ cm.}$$

2 BODA

$$8 \cdot 27 = 216 \text{ cm}$$

1 BOD

$$60 \text{ dužina duljine } 27 : 3 = 9 \text{ cm.}$$

2 BODA

$$60 \cdot 9 = 540 \text{ cm}$$

1 BOD

Opseg mozaika je  $216 + 540 = 756 \text{ cm.}$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Na koliko različitih načina četvero djece Ante, Bruno, Cvijeta i Dunja mogu među sobom podijeliti četiri jednake olovke?

**Prvo rješenje.**

Djeca među sobom dijele četiri jednake olovke pa svatko od njih može dobiti najviše četiri olovke. No, može se dogoditi da u nekoj podjeli neki od njih ne dobiju niti jednu olovku. Zato možemo imati ovih pet slučajeva:

$$4 = 4 + 0 + 0 + 0$$

$$4 = 3 + 1 + 0 + 0$$

$$4 = 2 + 2 + 0 + 0$$

$$4 = 2 + 1 + 1 + 0$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

1 BOD

Odredimo za svaki od tih slučajeva na koliko se različitih načina podjela olovaka može napraviti.

Podjela u kojoj jedno dijete dobiva sve četiri olovke može se napraviti na **4 različita načina.** 1 BOD

Podjela u kojoj jedno dijete dobiva tri olovke, a jedno dijete jednu olovku može se napraviti na **12 različitih načina:**

- dijete koje dobiva tri olovke možemo izabrati na 4 načina
- za svaki odabir djeteta koje dobiva tri olovke, na 3 načina možemo odabrati dijete koje će dobiti jednu olovku

2 BODA

Podjela u kojoj dvoje djece dobivaju po dvije olovke može se napraviti na **6 različitih načina:**

- prvo dijete možemo izabrati na 4 načina, drugo na 3 načina, no na taj način smo svaki odabir brojali dva puta, pa 12 dijelimo s 2

2 BODA

Podjela u kojoj jedno dijete dobiva dvije olovke, a dvoje djece po jednu olovku može se promatrati kao podjela u kojoj jedno dijete dobiva dvije olovke, a jedno dijete niti jednu. Takva se podjela može napraviti na **12 različitih načina**:

- odabir tog jednog djeteta koje dobije dvije olovke možemo napraviti na 4 različita načina, a za svaki taj odabir na 3 načina možemo odabrati dijete koje neće dobiti olovku preostalo dvoje djece dobiva po jednu olovku) 2 BODA

Podjela u kojoj svako dijete dobiva jednu olovku može se napraviti **na 1 način**. 1 BOD

Četvero djece može među sobom podijeliti četiri jednake olovke na  $4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$  različitih načina. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Ako učenik eksplicitno ne navede pet slučajeva, ali ih ispituje i raspisuje dodjeljuje mu se početni 1 BOD.

**Drugo rješenje.**

Kao u prvom načinu, imamo pet slučajeva. 1 BOD

Popunimo tablicu tako da za svako dijete napišemo koliko olovaka će dobiti:

Ante	Bruno	Cvijeta	Dunja
4	0	0	0
0	4	0	0
0	0	4	0
0	0	0	4
1 BOD			
3	1	0	0
3	0	1	0
3	0	0	1
1	3	0	0
0	3	1	0
0	3	0	1
1	0	3	0
0	1	3	0
0	0	3	1
1	0	0	3
0	1	0	3
0	0	1	3
2 BODA			
2	2	0	0
2	0	2	0
2	0	0	2
0	2	2	0
0	2	0	2
0	0	2	2
2 BODA			
2	1	1	0
2	1	0	1

2	0	1	1
1	2	1	0
1	2	0	1
0	2	1	1
1	1	2	0
1	0	2	1
0	1	2	1
1	1	0	2
1	0	1	2
0	1	1	2
			2 BODA
1	1	1	1
			1 BOD

Četvero djece može među sobom podijeliti četiri jednake olovke na  
 $4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$  različitih načina.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA